

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΠΙΝΑΚΕΣ KARNAUGH

3.1 ΣΚΟΠΟΣ

Η κατανόηση της απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση της Άλγεβρας Boole και με χρήση των Πινάκων Karnaugh (Karnaugh maps).

3.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.2.1 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ένα συνδυαστικό κύκλωμα (ΣΚ) έχει n εισόδους και m εξόδους. Για κάθε έναν από τους 2^n δυνατούς συνδυασμούς εισόδων, υπάρχει ένας και μόνον ένας δυνατός συνδυασμός εξόδων (Σχήμα 1). Κάθε χρονική στιγμή, κάθε μία από τις εξόδους εξαρτάται από τις τιμές των εισόδων την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή ένα συνδυαστικό κύκλωμα είναι ένα λογικό κύκλωμα χωρίς μνήμη. Στην πραγματικότητα οι τιμές των εισόδων επηρεάζουν τις τιμές των εξόδων μετά από ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, της τάξης των nanosecond.



Σχήμα 1: ΣΚ με n εισόδους και m εξόδους.

Η απλοποίηση των συναρτήσεων εξόδου ενός Συνδυαστικού Κυκλώματος (ΣΚ) οδηγεί σε απλούστερο (και οικονομικότερο) κύκλωμα.

Στην άσκηση αυτή θα παρουσιαστούν δύο μέθοδοι απλοποίησης λογικών συναρτήσεων:

- με χρήση της Άλγεβρας Boole
- με χρήση των χαρτών Karnaugh

3.2.2 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση της Άλγεβρας Boole, βασίζεται στη χρήση των Αξιωμάτων και των Θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole.

Παραδείγματα:

1. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$

$$Y = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} =$$

$$= \bar{A} \cdot B \cdot (C + \bar{C}) =$$

$$= \bar{A} \cdot B$$

2. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y = (A+B) \cdot (A+\bar{B})$

$$\begin{aligned}
 Y &= (A+B) \cdot (A+\bar{B}) = \\
 &= A \cdot A + A \cdot \bar{B} + B \cdot A + B \cdot \bar{B} = \\
 &= A + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + 0 = \\
 &= (A + A \cdot B) + A \cdot \bar{B} = \\
 &= A + A \cdot \bar{B} = \\
 &= A \quad (\text{Θεώρημα Απορρόφησης})
 \end{aligned}$$

3. Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση $Y = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + C}$

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + C} = \\
 &= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{C} = (\text{Θεώρημα De Morgan}) \\
 &= (A+B) \cdot \overline{C}
 \end{aligned}$$

3.2.3. ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΧΑΡΤΕΣ KARNAUGH

Η μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χρήση των χαρτών Karnaugh είναι μία γραφική μέθοδος που βασίζεται σε μία διαφορετική αναπαράσταση των Πινάκων Αληθείας των λογικών συναρτήσεων και χρησιμοποιείται με ευκολία για απλοποίηση λογικών συναρτήσεων δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών.

Ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης ονομάζονται τα γινόμενα όλων των όρων της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος (μεταβλητή) εμφανίζεται στην κανονική ή στη συμπληρωματική του μορφή.

Μία συνάρτηση n μεταβλητών έχει 2^n ελάχιστους όρους.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι οκτώ ελάχιστοι όροι μίας συνάρτησης τριών μεταβλητών ($2^3=8$).

Πίνακας 1

A	B	C	Ελάχιστοι όροι
0	0	0	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0	0	1	$m_1 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0	1	0	$m_2 = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0	1	1	$m_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	$m_4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	$m_5 = A \cdot \overline{B} \cdot C$
1	1	0	$m_6 = A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	$m_7 = A \cdot B \cdot C$

Προσοχή: Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως το Λογικό Ή (καταχρηστικά ΑΘΡΟΙΣΜΑ) των ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ όρων που την κάνουν 1.

Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1:

Δίνεται ο παρακάτω Πίνακας 2 Αληθείας ενός ΣΚ τριών μεταβλητών. Ζητείται να εκφρασθεί ως άθροισμα ελαχίστων όρων.

Πίνακας 2
Πίνακας Αληθείας ενός ΣΚ τριών μεταβλητών

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Απάντηση

Η συνάρτηση Y γράφεται ως άθροισμα ελαχίστων όρων:

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C = \Sigma (1, 4, 7)$$

Παράδειγμα 2:

Να εκφραστεί η συνάρτηση τριών μεταβλητών $Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$ ως άθροισμα ελαχίστων όρων.

Απάντηση

Σε κάθε γινόμενο δεν υπάρχουν όλοι οι όροι (μεταβλητές). Για τις μεταβλητές που λείπουν από κάθε γινόμενο του αθροίσματος, πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το άθροισμα της μεταβλητής που λείπει και του συμπληρώματός της. Δηλαδή για το γινόμενο $A \cdot B$ λείπει η μεταβλητή C, άρα πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το άθροισμα $(C + \bar{C})$, ενώ για το γινόμενο $\bar{A} \cdot C$ λείπει η μεταβλητή B, άρα πολλαπλασιάζουμε το γινόμενο αυτό με το άθροισμα $(B + \bar{B})$.

Επομένως, η συνάρτηση εκφράζεται ως άθροισμα ελαχίστων όρων.

Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot B + \bar{A} \cdot C = \\ &= A \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + \bar{A} \cdot (B + \bar{B}) \cdot C = \\ &= A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \end{aligned}$$

3.2.4 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ (ΧΑΡΤΕΣ) KARNAUGH.

Ο χάρτης Karnaugh αποτελείται από τετράγωνα, το κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο όρο της λογικής συνάρτησης που αναπαριστά.

Οι χάρτες Karnaugh δύο, τριών και τεσσάρων μεταβλητών παρουσιάζονται στα Σχήματα 1, 2 και 3, αντίστοιχα.

	\bar{B}	B		$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
\bar{A}	m0	m1		m0	m1	m3	m2
A	m2	m3		m4	m5	m7	m6

Σχήμα 2. Χάρτης Karnaugh δύο και τριών μεταβλητών.

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	m0	m1	m3	m2
$\bar{A} \cdot B$	m4	m5	m7	m6
$A \cdot B$	m12	m13	m15	m14
$A \cdot \bar{B}$	m8	m9	m11	m10

Σχήμα 3. Χάρτης Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών.

Η αναπαράσταση μίας λογικής συνάρτησης με χάρτη Karnaugh γίνεται θέτοντας "1" σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή "1" και "0" (ή τίποτα) σε κάθε τετράγωνο του χάρτη Karnaugh που αντιστοιχεί σε ελάχιστο όρο, όπου η συνάρτηση έχει τιμή "0".

Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1:

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών:

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Απάντηση

Η συνάρτηση είναι σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων, επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 4.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
\bar{A}			1	1
A	1	1		

Σχήμα 4. Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Παράδειγμα 2:

Να αναπαρασταθεί με χάρτη Karnaugh η λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών
 $Y(A,B,C,D) = A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D}$

Απάντηση

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων

$$\begin{aligned} Y(A,B,C,D) &= A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D} = \\ &= A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot (D + \bar{D}) + (A + \bar{A}) \cdot (B + \bar{B}) \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} = \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + \\ &\quad + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τον χάρτη Karnaugh του Σχήματος 5.

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	1			
$\bar{A} \cdot B$	1		1	1
$A \cdot \bar{B}$	1		1	
$A \cdot B$	1			

Σχήμα 5. Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
 $Y(A,B,C,D) = A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{C} \cdot \bar{D}$

3.2.4.1. Μέθοδος απλοποίησης λογικών συναρτήσεων με χάρτες Karnaugh.

Κανόνες:

1) Γειτονικά τετράγωνα σε ένα χάρτη Karnaugh ονομάζονται τα τετράγωνα που είναι σε συνεχόμενες οριζόντιες ή κάθετες θέσεις, αλλά όχι σε διαγώνιες θέσεις. Το πλήθος των γειτονικών τετραγώνων πρέπει να είναι δύναμη του 2, δηλαδή 2, 4, 8.

Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 5, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_0 και m_4 είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_6 και m_7 , τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_4, m_5, m_6 και m_7 , καθώς και τα 8 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους $m_2, m_3, m_6, m_7, m_{10}, m_{11}, m_{14}$ και m_{15} .

Δεν είναι γειτονικά τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_5 και m_{15} .

2) Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των χαρτών Karnaugh είναι ότι είναι αναδιπλούμενοι. Η αναδίπλωση μπορεί να γίνει γύρω από την περίμετρο (τις εξωτερικές γραμμές) του χάρτη Karnaugh.

Έτσι, στο χάρτη Karnaugh του Σχήματος 5, τα 2 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_0 και m_8 είναι γειτονικά. Επίσης, γειτονικά είναι τα 2 τετράγωνα που πε-

ριέχουν τους ελάχιστους όρους m_4 και m_6 , τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_2 , m_3 , m_{10} και m_{11} , καθώς και τα 4 τετράγωνα που περιέχουν τους ελάχιστους όρους m_4 , m_6 , m_{12} και m_{14} .

3) Δύο γειτονικά τετράγωνα σε ένα χάρτη Karnaugh αντιστοιχούν σε ελάχιστους όρους που διαφέρουν κατά μία μόνο μεταβλητή (η οποία εμφανίζεται με την πραγματική τιμή της στον έναν ελάχιστο όρο και με τη συμπληρωματική τιμή της στον άλλον ελάχιστο όρο). Αυτή η μεταβλητή μπορεί να απομακρυνθεί αν και στα δύο γειτονικά τετράγωνα έχει τεθεί "1". Αν λοιπόν ομαδοποιήσουμε 2 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1" τότε απομακρύνουμε μία μεταβλητή.

Με την ίδια λογική, αν ομαδοποιήσουμε 4 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1", τότε απομακρύνουμε 2 μεταβλητές, αν ομαδοποιήσουμε 8 γειτονικά τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1", τότε απομακρύνουμε 3 μεταβλητές (επιτρέπεται να συμπεριληφθεί ένα τετράγωνο σε πολλές ομάδες γειτονικών τετραγώνων).

4) Ομαδοποιούμε όλα τα τετράγωνα στα οποία έχει τεθεί "1". Αν δεν ομαδοποιείται κάποιο τετράγωνο με ένα άλλο το θεωρούμε μόνο του ομάδα.

Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1:

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Απάντηση

Ο χάρτης Karnaugh είναι αυτός του Σχήματος 6.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$	$B \cdot C$
\bar{A}			1	1
A	1	1		

Σχήμα 6. Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης

$$Y(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

Οι "1" της συνάρτησης ομαδοποιούνται σε δύο δυάδες:

- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε κόκκινο περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $A \cdot \bar{B}$
- τα δύο γειτονικά τετράγωνα του χάρτη Karnaugh, που βρίσκονται μέσα σε μπλε περίγραμμα, αντιστοιχούν στον όρο $\bar{A} \cdot B$

Η ομαδοποίηση έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση της συνάρτησης ως εξής:

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

Παράδειγμα 2:

Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$Y(A,B,C)=A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}$$

Απάντηση

Η συνάρτηση γράφεται σε μορφή αθροίσματος ελάχιστων όρων:

$$\begin{aligned} Y(A,B,C) &= A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} = \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χάρτη Karnaugh του Σχήματος 7.

	$\bar{B} \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot \bar{C}$
\bar{A}	1			1
A	1	1		1

Σχήμα 7. Χάρτης Karnaugh της συνάρτησης
 $Y(A,B,C)=A \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C}$

3.2.4.2. Αδιάφοροι Όροι

Μία μεταβλητή εισόδου ή εξόδου ονομάζεται αδιάφορος όρος όταν δεν μας ενδιαφέρει η τιμή της (αν είναι "0" ή "1"). Η τιμή ενός αδιάφορου όρου συμβολίζεται με X.

3.3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

3.3.1.

1) Να απλοποιηθεί η λογική συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών

$$\begin{aligned} Y(A,B,C,D) &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \\ &+ \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \\ &+ A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \\ &+ A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \end{aligned}$$

2) Να σχεδιάσετε το ΣΚ που αντιστοιχεί σε αυτή την συνάρτηση μόνον με πύλες AND, OR, NOT.

3.3.2.

1) Να απλοποιηθεί η συνάρτηση Y τεσσάρων μεταβλητών με τον ακόλουθο Πίνακα Αληθείας:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2) Να σχεδιάσετε το ΣΚ που αντιστοιχεί σε αυτή την συνάρτηση μόνον με πύλες NAND.

3) Να σχεδιάσετε το ΣΚ που αντιστοιχεί σε αυτή την συνάρτηση μόνον με πύλες NOR.

Προσοχή: Κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως το Λογικό ΚΑΙ (καταχρηστικά ΓΙΝΟΜΕΝΟ) των ΜΕΓΙΣΤΩΝ όρων που την κάνουν 0.

3.4. ΓΡΑΠΤΗ ΑΣΚΗΣΗ

3.4.1.

Να γραφούν οι πίνακες Karnaugh, οι απλοποιημένες συναρτήσεις και τα κυκλώματα του πειραματικού μέρους.